Prova de Avaliação 1

200 pontos = 8 + 4*3 + 4*3 + 2*4 + 3*4 + 2*8 + 3*4 + 8 + 3*4

1. Na figura está representada a circunferência trigonométrica, num referencial o.n. Oxy. Sabe-se que:

   - o ponto A tem coordenadas (1,0);

   - a reta r é tangente à circunferência no ponto A;

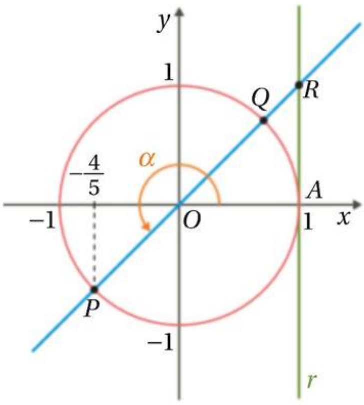
   - [PQ] é um diâmetro da circunferência;

   - o ponto R é a interseção da reta r com a reta PQ;

   - o ângulo AOP, designado por α, pertence ao 3.º quadrante;

   - o ponto P tem abcissa igual a $-\frac{4}{5}$.

   Determine sen (α) e tan (α).



2. Simplifica:

   a) $\sin(\pi - \alpha) - \sin(2\pi - \alpha) + \cos(-\alpha) + \cos(\pi - \alpha)$

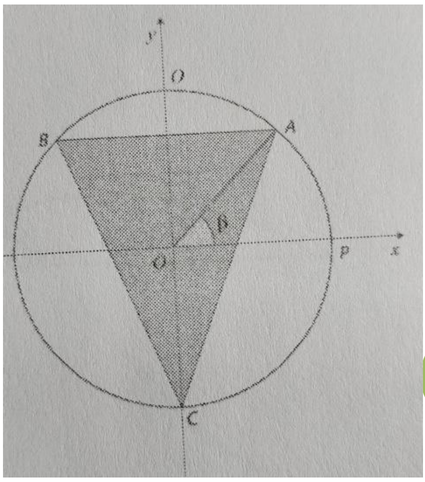
   b) $\tan(\pi - \alpha) - \tan(2\pi - \alpha) - 3\sin(-\alpha) - 2\sin(2\pi + \alpha)$

   c) $\sin(-\alpha) \,.\, \sin(\pi + \alpha) - \cos(-\alpha) \,.\, \cos(\pi - \alpha)$

   d) $\cos(\frac{5\pi}{2} + \alpha) - \sin(\alpha - \frac{7\pi}{2}) - \cos(7\pi - \alpha) + 2\sin(\alpha + 4\pi)$

3. Considere a função f, definida em $[0, \frac{\pi}{2}[$, por $f(x) = \cos(x) + sen(x)\cos(x)$

3.1. Determine, se existirem, os zeros da função f



3.2. Sabendo que $\alpha \in [0, \frac{\pi}{2}[$ e $tg(\pi - \alpha)$, determine $f(\frac{\pi}{2} - \alpha)$

3.3. Na figura ao lado está representada a circunferência trigonométrica e um triângulo [ABC]. Sabe-se que:

- o ponto A desloca-se sobre o arco PQ nunca coincidindo com o ponto Q

- a reta AB é paralela ao eixo Ox

- o ponto C é a interseção da circunferência com o eixo Oy

- β é a amplitude do ângulo POA

Mostre que a área do triângulo [ABC] é dada por f(β)

3.4. Mostre que $f(x) = \frac{cos^3(x)}{1 - sen(x)}$

4. Determine os números reais que são solução de cada uma das seguintes equações:

4.1. $2\cos(x) + 1 = 0$

4.2. $sen(x) = \cos(2x)$

5. Sejam a e b números reais e seja f a função definida por $f(x) = a + bsin(2x)$

5.1. Determine a e b, sabendo que a e b são números positivos e que o contradomínio de f é o intervalo [−2, 4]

5.2. Admita, agora, que a = 1 e b = −1

5.2.1. Mostre que os zeros da função f coincidem com os seus minimizantes e determine o maior zero negativo.

5.2.2. Mostre que π é período da função f

6. Seja g a restrição da função cosseno ao intervalo $[-\frac{\pi}{3}, \frac{\pi}{6}]$, ou seja, g é a função, de domínio $[-\frac{\pi}{3}, \frac{\pi}{6}]$, definida por $g(x) = cos(x)$. Determine o contradomínio da função g.

7. Quantas são as soluções da equação $sin^2(x) - \sin(x) = 0$ que pertencem ao intervalo [0, 10π]?

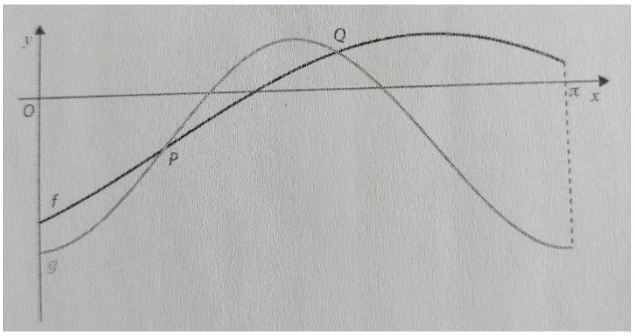
(A) 3

(B) 12

(C) 15

(D) 16

8. Na figura encontram-se as representações gráficas de duas funções f e g, de domínio [0, π], definidas por: $f(x) = 2\sin\left(x - \frac{\pi}{4}\right) - 1$ e $g(x) = -2\cos(2x) - 1$. Tal como a figura sugere, P e Q são os pontos de interseção dos gráficos de f e g.



8.1. Determine os zeros da função g.

8.2. Determine as abcissas dos pontos P e Q

8.3. Seja α ϵ $]\frac{\pi}{2}, \frac{3\pi}{4}[$ tal que $f\left(\alpha + \frac{\pi}{4}\right) = \frac{1}{2}$. Determine o valor de $g(\frac{\alpha}{2})$

9. Seja θ um número real. Sabe-se que θ é uma solução da equação $cos\,(x) = -\frac{1}{5}$. Qual das expressões seguintes designa uma solução da equação $sen(x) = \frac{1}{5}$

(A) θ + π

(B) θ – π

(C) θ + π/2

(D) θ – π/2

10. Considere a função f, de domínio ℝ, definida por $f(x) = 5 - 3sen(3x + \frac{\pi}{6})$

10.1. Determine o contradomínio da função f.

10.2. Determine uma expressão geral dos maximizantes da função f.

10.3. Prove que: $\forall x \in \mathbb{R},\ f\left(x - \frac{\pi}{2}\right) + f\left(x + \frac{\pi}{2}\right) = 10$