Prova de Avaliação 5

GRUPO I (76 pontos = 8*8 + 12)

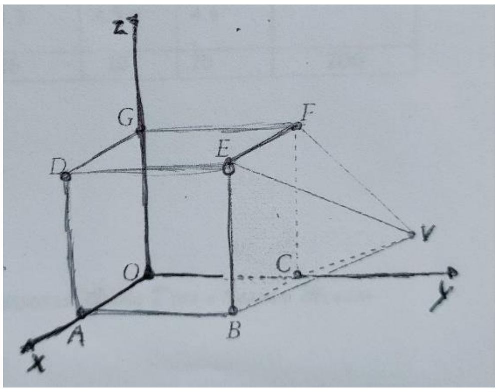
1. Considera num referencial ortonormado Oxyz do espaço, os pontos M (1, -2, -2) e N (0, -1, 2). As coordenadas de um vetor $\vec{v}$, colinear com o vetor $\overrightarrow{NM}$ e de norma igual a $\sqrt{2}$, é:

   (A) (1/2, -1/2, -2) (B) (1, -1, -4) (C) (1, 0, 1) (D) (1/3, -1/3, -4/3)

2. Em relação a um referencial ortonormado Oxyz, considera a superfície esférica definida pela equação $x^2 + y^2 + z^2 + 2x - 4y - 13 = 0$ e o ponto A (0,3, -4). Seja C o centro dessa superfície esférica. As coordenadas do vetor $\overrightarrow{AC}$ são:

   (A) (1, 1, -4) (B) (-1, -1, 4) (C) (-1, 2, 0) (D) (-1, 5, -4)

3. Na figura está representado, num referencial ortonormado do espaço, um sólido formado por um cubo e uma pirâmide quadrangular regular. Sabe-se que:



   - O vértice O do cubo coincide com a origem do referencial;
   - Os vértices A, C e G do cubo pertencem aos semieixos positivos Ox, Oy e Oz, respetivamente;
   - A aresta do cubo tem comprimento igual a 2;
   - A base da pirâmide coincide com uma das faces laterais do cubo;
   - A altura da pirâmide tem comprimento igual à aresta do cubo.

3.1. Indique as coordenadas de todos os vértices do sólido.

3.2. Defina por uma condição cartesiana a reta DG

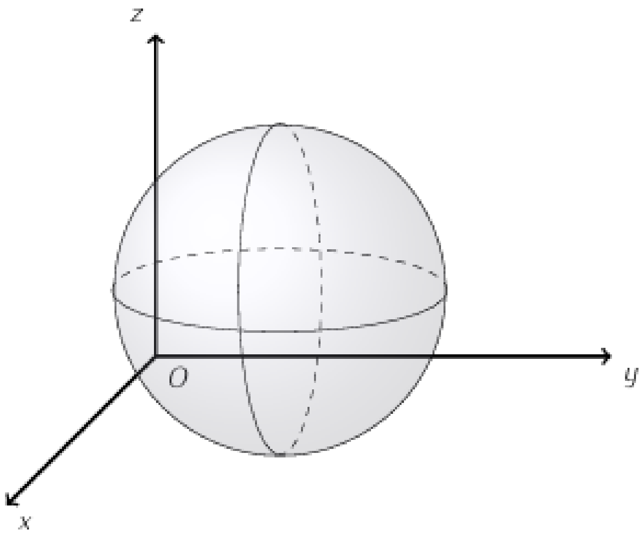
3.3. Defina por uma condição cartesiana a face [BCEF] do cubo.

3.4. Escreva uma equação vetorial da reta r que passa em M, ponto médio da aresta [BE], e é paralela à reta VC.

3.5. Escreva a equação cartesiana reduzida da superfície esférica de centro no ponto A e raio igual a $||\overrightarrow{DC} + \overrightarrow{VF}||$. Sugestão: começa por determinar $\overrightarrow{DC} + \overrightarrow{VF}$.

3.6. Determine uma equação do plano mediador do segmento de reta [BG]. Apresente a equação na forma $ax + by + cz + d = 0$, sendo a, b, c e d números reais.

4. Considera a esfera representada no referencial o.n. Oxyz. Sabe-se que a esfera é tangente ao plano xOy e tem centro $(3, 3, z_C)$. Também se conhece que a interseção da esfera com o plano de equação $z = 3$ é um círculo de área 3π. Determine a condição que define a esfera mencionada.



GRUPO II (124 pontos = 14*8 + 12)

1. Considera a família de funções h tais que: $h(x) = x^3 + kx^2 + x - k - 2$; $k \in \mathbb{R}$.
   1.1. Sabe-se que -2 é zero de uma das funções da família.
      1.1.1. Determina o valor de k nessa função.
      1.1.2. Determina os outros zeros da função.

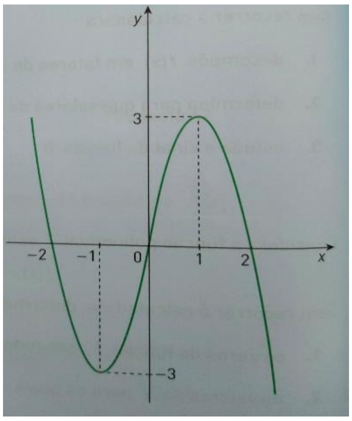
   1.2. Considera $k = -2$ e determina o quociente e o resto da divisão de $h(x)$ por:
      1.2.1. $x - 3$.
      1.2.2. $x^2 + 1$.

2. Considera a função polinomial f definida por $f(x) = x^3 + 2x^2 - 2x$.
   2.1. Resolve as seguintes inequações:
      2.1.1. $f(x) \geq 2x^2$.
      2.1.2. $f(x) < -3x$.

   2.2. Para que valores de x a representação da função f em referencial o.n. xO, fica abaixo da bissetriz dos quadrantes ímpares?

3. Considera a função polinomial f do 3º grau representada graficamente no referencial da figura e g a função definida por: $g(x) = -x^3 - 3x^2 + 3x + 9$.
   3.1. Determina o resto da divisão de:
      3.1.1. $g(x)$ por $x + 3$.
      3.1.2. $f(x)$ por $x - 1$.

   3.2. Decompõe $g(x)$ em fatores.
   3.3. Define analiticamente a função f.
   3.4. Determina o conjunto-solução da condição $(9 - x^2)f(x + 3) > 0$



4. Recorrendo à regra de Ruffini mostra que:
   4.1. $P(x) = x^4 + x^3 - 4x^2 - 4x$ é divisível por $x - 2$.
   4.2. $Q(x) = x^3 - 3x^2 + 1/3x - 1$ é divisível por $x - 3$.

5. Um automobilista efetuou o trajeto casa-emprego em 20 minutos, sendo a velocidade, v, dada em cada instante, t, pela expressão: $v(t) = -0{,}1t^3 + 1{,}99t^2 + 0{,}2t$, sendo t em minutos e v em quilómetros por hora. Sabe-se que a sinalização, durante o percurso efetuado, não permite exceder os 90 km/h e existe um cruzamento com sinal Stop. Num pequeno texto, faz uma crítica ao cumprimento das regras de trânsito por parte do automobilista, indicando as transgressões, caso tenham existido.